M6 : Mouvements à force centrale

Partie I - Théorème du moment cinétique

I. MOMENT D'UNE FORCE:

I.1. Le produit vectoriel :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques. On note $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ tel que :

- $\left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\| = \left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|.\left|\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right|$

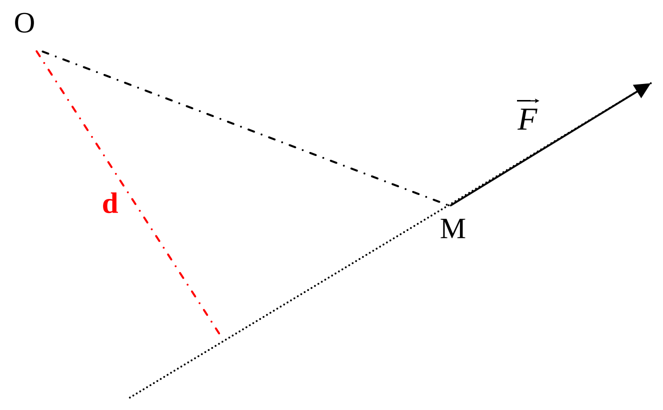
- Le sens de $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ forme une base orthogonale directe (utiliser la règle du tire-bouchon)

I.2. Moment d'une force

On définit le moment d'une force $\vec{F}$ appliquée en M, par rapport à un point O, noté $\overrightarrow{M_O\left(\vec{F}\right)}$ tel que

$\overrightarrow{M_O\left(\vec{F}\right)} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ Unité : N.m

Méthode de détermination du moment :



La norme :
Soit **le bras de levier** d la distance de O à la droite portant $\vec{F}$

Alors $\left\|\overrightarrow{M_O\left(\vec{F}\right)}\right\| = \text{d}.\left\|\vec{F}\right\|$

Le sens :

- Repérer le sens de rotation de M autour de l'axe orthogonal à $\vec{F}$ passant par O
- La translation du tire bouchon tourné dans le sens défini ci-dessus donne le sens du vecteur moment.

II. MOMENT CINETIQUE

La quantité de mouvement donnait une information sur la cinétique du système en translation.
Le moment cinétique doit nous informer de la cinétique du système en rotation autour de O.

Le moment cinétique d'un système matériel M supposé ponctuel et de masse m, par rapport à O et dans le référentiel $\Re$ est le moment de la quantité de mouvement :

$\overrightarrow{\sigma_O(M)_{\Re}} = \overrightarrow{OM} \wedge m.\overrightarrow{v(M)_{\Re}}$

III. THEOREME DU MOMENT CINETIQUE

On considère un point 0 fixe dans le référentiel $\Re$ galiléen.
M est soumis dans $\Re$ à la résultante des forces extérieures $\overrightarrow{F_{ext}}$

Alors $\dfrac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_0(M)_{\Re}}\right)_{\Re} = \overrightarrow{M_0\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)}$

Partie II - Mouvements à force centrale

On considère un système soumis dans un référentiel $\Re$ galiléen à une force $\vec{F}$ dirigée vers un point O fixe dans $\Re$.

I. Conservation du moment cinetique

On a $\overrightarrow{M_{\vec{F}/0}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$. Or d'après le théorème du moment cinétique : $\left(\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\right)_{\Re} = \overrightarrow{M_{\vec{F}/0}}$

Donc pour un mouvement à force centrale : $\overrightarrow{\sigma_{M/0}} = \overrightarrow{Cte}$

Un point M soumis à une force centrale a une trajectoire plane, dans le plan contenant les vecteurs vitesse et position à l'instant initial.

II. Loi des aires :

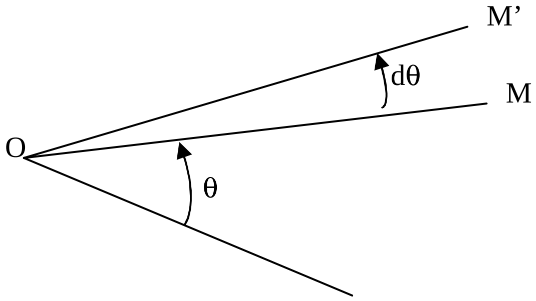
II.1. Constante des aires :

On va définir la constante des aires C telle que $\overrightarrow{\sigma_{M/0}}$ **= m.C.** $\overrightarrow{u_z}$

C = r². $\dot{\theta}$

II.2. Loi des aires :

On va donner la signification physique de la constante des aires :



$C = 2.\frac{dS}{dt}$

Le rayon vecteur balaye des aires égales pendant des durées égales

III. Mouvement dans un champ Newtonien :

III.1. Qu'est-ce qu'un champ Newtonien

C'est un champ de vecteur ayant une expression générale du type : $\overrightarrow{\alpha_{(M)}} = k.\frac{1}{r^2}\overrightarrow{u_r}$

On s'aperçoit que les champs électrostatique (k<0 ou >0) et de gravitation (k<0) sont des champs Newtoniens.
D'où l'importance de cette étude.
On s'intéressera dans la suite de l'étude au cas des champs de gravitation.

On a donc un système dans un champ $\overrightarrow{\alpha} = -\frac{G.M}{r^2}.\overrightarrow{u_r}$.

L'énergie potentielle du système est alors $U_{int} = -\frac{G.M.m}{r}$ (en prenant $U_{int(\infty)}=0$)

III.2. Etats liés – états de diffusion :

On souhaite déterminer si les deux corps :

- sont susceptibles de se retrouver à l'infini l'un de l'autre (état de diffusion)
- resteront indéfiniment en interaction (état lié)

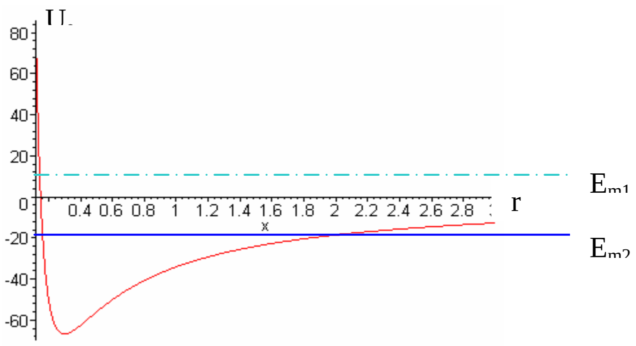
On traite le problème par une étude énergétique

$$E_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \left(r.\dot{\theta}\right)^2\right) - \frac{G.M.m}{r} = \frac{1}{2}m.\dot{r}^2 + \frac{1}{2}.m.r^2.\dot{\theta}^2 - \frac{G.M.m}{r}$$

Cette énergie mécanique pourrait être celle d'un système en translation rectiligne d'énergie potentielle :
$\frac{1}{2}.m.r^2.\dot{\theta}^2 - \frac{G.M.m}{r}$ (énergie potentielle E_{eff} effective de notre système)

$$E_m = \frac{1}{2}m.\dot{r}^2 + E_{eff}$$

On nomme énergie potentielle effective l'énergie E_{eff} du système telle que $E_m = \frac{1}{2}.m.\dot{r}^2 + E_{eff}$



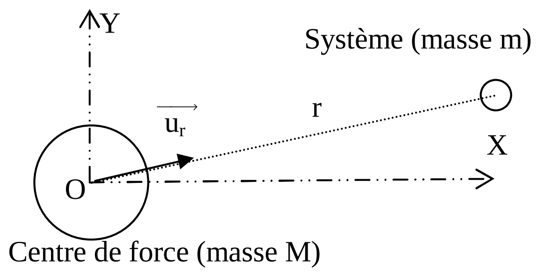
L'évolution de r sera susceptible de s'inverser s'il existe un état du système tel que $\dot{r} = 0$ soit $E_m = E_{eff}$
Cela définira alors un extrémum de la valeur de r.
On aura donc pour tout état du système $E_m > E_{ff}$
On a pour énergie effective pour le mobile fictif:
$E_{eff} = \frac{1}{2}.m.\frac{C^2}{r^2} - \frac{G.M.m}{r}$

Le système sera donc lié si son énergie mécanique est négative

IV. TRAJECTOIRE DES PLANETES – COMETES…

IV.1. Référentiel d'étude

- On fait l'hypothèse d'une seule interaction système – centre de force.
- On admet que dans le cas où M >> m, le référentiel lié au centre de force peut être supposé galiléen. Ce sera donc le référentiel d'étude.



IV.2. Etude de la trajectoire:

Le mouvement étant à force centrale, la trajectoire sera plane. On choisit de repérer M par ses coordonnées cylindriques. M(r,θ)

IV.2.a. Equation de la trajectoire:

Soit M une masse placée à l'origine d'un référentiel supposé galiléen.

La trajectoire des systèmes matériels soumis à un champ newtonien de force centrale est une conique

$$r = \frac{p}{1 + e.\cos(\theta + \varphi)} \quad \text{avec} \quad p = \frac{C^2}{G.M}$$

IV.3. Etude énergétique :

Relation entre énergie mécanique et excentricité de la conique

$$E_m = \frac{m.M.G}{2.p}.(e^2-1)$$

On avait prévu un état lié pour $E_m<0$, ce qui correspond bien à la trajectoire elliptique

Cas des états liés

Dans le cas des états liés, la trajectoire est elliptique. Une des caractéristiques de l'ellipse est son demi grand axe a.

On peut remarquer que 2.a = $r_{min} + r_{max} = \dfrac{p}{1+e} + \dfrac{p}{1-e} = \dfrac{2.p}{(1-e)^2}$

L'énergie mécanique du mobile fictif pour un état lié est : $E_m = -\dfrac{m.M.G}{2.a}$

IV.4. Vitesses particulières

- Pour un satellite en orbite circulaire : $v = \sqrt{\dfrac{G.M}{r}}$
- Première vitesse cosmique : vitesse minimum permettant une satellisation autour d'une planète de rayon R : $v = \sqrt{\dfrac{G.M}{R}}$
- Vitesse de libération (vitesse minimum premettant un état de diffusion) : $v_{lib} = \sqrt{\dfrac{2.G.M}{r_0}}$

IV.5. Planètes : Lois de Kepler :

1ère loi : Les planètes décrivent des ellipses dont le soleil est l'un des foyers

2ème loi : En des temps égaux, les rayon-vecteurs balayent des aires égales

3ème loi : Les rapports $\frac{T^2}{a^3}$ (T période et a demi grand axe) relatifs aux différentes planètes ont tous la même valeur.

1ère loi :
Planète soumise à une force centrale : la trajectoire est une conique. Si elle est fermée, c'est alors une ellipse. L'un des foyers est au barycentre du système, confondu avec le soleil.

2ème loi :

Loi des aires. On a défini C = $r^2.\ \dot{\theta}$ et on a montré que C = $2.\frac{dS}{dt}$

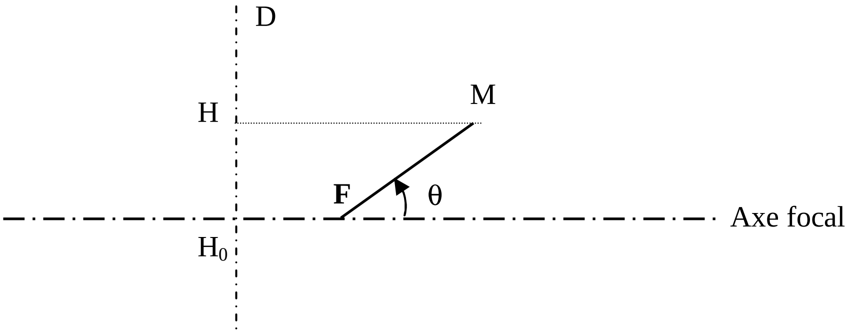
3ème loi :
Cette loi doit être retrouvée dans le cas particulier d'une trajectoire circulaire

La période de révolution est telle que $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4.\pi^2}{G.M}$

Annexe : Les coniques

Une conique est l'ensemble des points d'un plan tels que le rapport des distances à un point F (**foyer) et à une droite D (directrice) soit constant.**

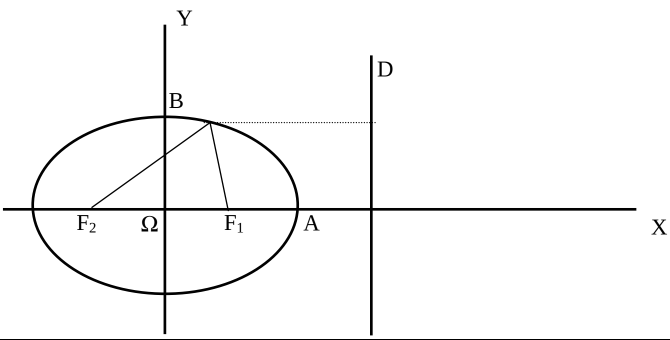
On peut définir : $e = \dfrac{FM}{HM}$



On peut définir la position de M en coordonnées polaires. On obtient alors l'équation de la conique en coordonnées polaires : On a par définition r = e.HM or HM= $\dfrac{p}{e + r.\cos\theta}$ donc :

$$\boxed{r = \dfrac{p}{1 \pm e.\cos\theta}}$$

Cas des coniques



a : demi grand axe
b : demi petit axe
c : ΩF_1

$$a = \dfrac{p}{(1-e^2)} \qquad b = \dfrac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \qquad c = e.a$$

$$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{et} \qquad a^2 - b^2 = c^2$$

Surface d'une ellipse : S = π.a.b

Fiche TDM6: Interactions Newtoniennes

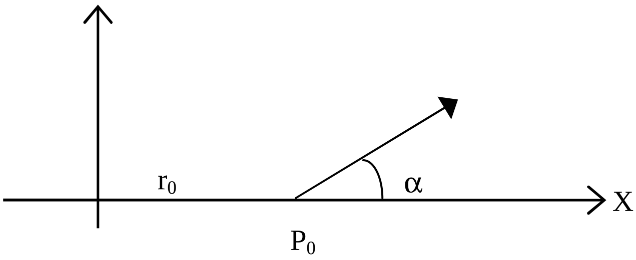
Données générales

terre : R_T=6370 Km $M_T=6.10^{24}$ Kg au sol : $g_0=9{,}81 m.s^{-2}$ distance terre-soleil : $d_{S-T}=1{,}5.10^{11}$m	**Lune :** $R_L=0{,}27.R_T$ $M_L=\dfrac{M_T}{81}$ $T_{orb}=T_{rot}$: la lune présente toujours la même face à la terre distance terre-lune : d_{T-L}=384000 Km $g_L=\dfrac{g_0}{6}$

Ex1- ***Etude d'une trajectoire elliptique***

Un satellite (P) de masse m est en interaction avec la terre de masse M_T et de centre O. Le référentiel géocentrique est supposé galiléen. Les conditions de lancement du satellite sont les suivantes :

$$\begin{cases} OP_0 = r_0 \\ v_0 \\ (\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{v_0}) = \alpha \end{cases}$$



1. A quelle condition la trajectoire sera-t-elle fermée ? (on nommera la valeur particulière du paramètre).
2. Exprimer alors le demi grand axe pour la trajectoire, a, ainsi que la période T_0

Ex2- Trajectoire d'une comète

La terre décrit autour du soleil (de centre S) une orbite quasiment circulaire de rayon r_0 = 1,5 10^8 km à la vitesse v_T = 30 km.s^{-1}.

Une comète C passe extrêmement près du soleil, avec une distance au périhélie $r_P = \alpha.r_0$ ($\alpha = 5.10^{-3}$).

1- En considérant que l'orbite de la comète est parabolique, calculer la vitesse v_{Max} maximale de la comète sur sa trajectoire.

2- Des mesures précises ont montré qu l'orbite de la comète était en fait elliptique d'excentricité e = 1-x avec x = 10^{-4} (x<<1)

   a. A quelle distance r_A du soleil la comète va-elle sélogner au maximum ? Evaluer sa vitesse à cette distance.
   b. Quelle sera la période de la comète sur sa trajectoire ?
   c. Estimer l'erreur relative commise sur v_{Max} dans la question 1.

Ex3- ***Distance minimale d'approche***

Une comète passe à une distance minimale du soleil égale à la moitié de l'orbite terrestre R_T (supposée circulaire). La vitesse de la comète en ce point est égale à deux fois celle de la terre V_0

On suppose les orbites de la terre et de la comète coplanaires.

1. la comète va-t-elle s'échapper du système solaire ?

2. Déterminez le point d'intersection des deux orbites

3. Déterminez en ce point la valeur de la vitesse de la comète ainsi que l'angle entre les deux vecteurs vitesse

4. Déterminez la durée pendant laquelle la comète se trouve à l'intérieur de l'orbite terrestre`

Ex4- ***Freinage d'un satellite***

Un satellite de la terre (de masse M_T) se trouve sur une trajectoire circulaire de rayon R = $11.R_T$.

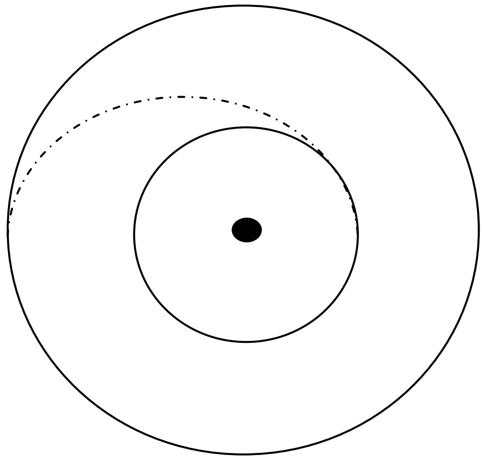
1- Exprimer la vitesse v de ce satellite en fonction de R, G et M_T. Vérifier la troisième loi de Kepler.

2- Exprimer l'énergie mécanique du satellite en fonction de son énergie cinétique E_c.

3- Le satellite perd une petite partie de son énergie dE_m par frottement. On considère que sa nouvelle trajectoire reste circulaire.
   Comment a évolué sa vitesse ?
   Que se passe-t-il lorsqu'un satellite rentre dans l'atmosphère ?

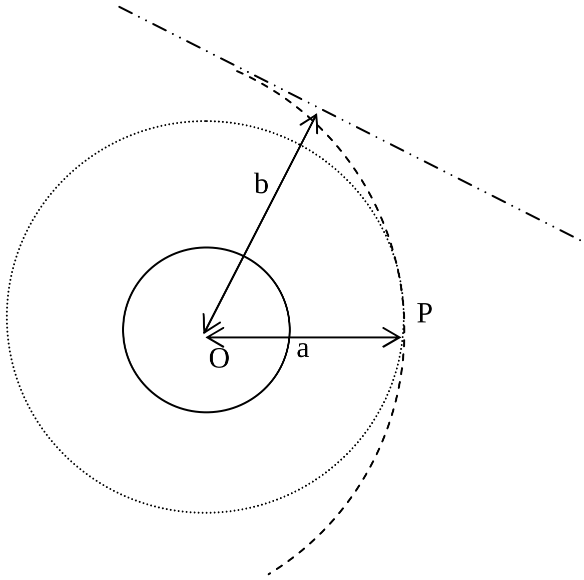
4- Le satellite étant sur sa trajectoire circulaire, on veut modifier brusquement sa vitesse afin qu'il retombe sur terre. Quelle doit-être au minimum la variation de vitesse à lui imposer ?

Ex5- ***Trajectoire de transfert d'Hohmann***



1- Relier les vitesses d'un satellite artificiel de la terre à ses passages par l'apogée et le périgée de sa trajectoire en fonction des coordonnées radiales de ces deux points.
2- Le satellite est initialement situé sur une orbite circulaire à une altitude $h_0 = 300$Km. Déterminer sa vitesse.
3- On fait brusquement varier la norme de sa vitesse afin que l'orbite devienne elliptique d'apogée une altitude
H = 35 600Km du centre de la terre. Quelle énergie doit-on communiquer au satellite ?
4- Au passage à l'apogée, on communique au satellite une nouvelle variation de vitesse pour que son orbite devienne circulaire.
   a. Quelle énergie doit-on communiquer au satellite
   b. Quelle est sa vitesse sur cette nouvelle orbite.

Ex6-



Un vaisseau arrive dans la zone de champ crée par la lune. On supposera qu'il est alors en interaction uniquement avec la lune.
De plus, on suppose la lune fixe dans un référentiel galiléen $\Re_0$ Les grandeurs cinématiques sont données dans ce référentiel.
Pour le vaisseau :

- A une distance très éloignée de la lune, sa vitesse est $\overrightarrow{V_0}$.
- Sa trajectoire est hyperbolique et son asymptote est à une distance b du centre de la lune.
- Sa distance minimum d'approche (par rapport au centre de la lune) est a.

On donne G (constante universelle) , M_L masse de la lune et m masse du vaisseau.

1. Quelle est la vitesse V_P au périhélie, en fonction de V_0, a et b ?
2. Trouver une relation entre V_0, G, M, b et a.
3. En P, on modifie son énergie pour le placer sur une trajectoire circulaire. Déterminer alors la vitesse V_1 du vaisseau